Exkurs: Riemann Integral, Riemannsche Summen

Integralberechnung bisher: zu $f \in \mathcal{R}([a,b])$

„finde" $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$(*)\quad \| f - \varphi_n \| \longrightarrow 0;$$

dann ist $\displaystyle\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\,dx.$

(*) ist sehr restriktiv (bzw. aufwendig), man geht anders vor:

Def. 12.4 (Riemannsche Summen)

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine (beliebige) Fkt. Sei

$$Z := \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$$

eine Zerlegung von $[a,b]$. Außerdem

Seien beliebige Zwischenstellen

$$z_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

gewählt. Dann heißt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta x_k\,, \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}}\,,$$

Riemannsche Summe zu $\mathcal{Z}$ und z_k.

Notation:

$$\delta_{\mathcal{Z}} := \max\{\Delta x_k : k = 1, \dots, n\}$$

Feinheit von $\mathcal{Z}$,

$$z_k := \text{Stützstellen}.$$

$\square$

$\boxed{\textbf{SATZ 12.7}}$: (Konvergenz der Riemannschen Summen)

Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_a^b f\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z mit Feinheit $\delta_Z \le \delta$ und beliebige Wahl von Stützstellen z_i.

M.a.W.: $Z_n :=$ Folge von Zerlegungen mit $\delta_{Z_n} \longrightarrow 0$,

$S_n :=$ zugehörige Riemannsche Summe (bei beliebiger Wahl von Stützstellen)

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Bem: Zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist es daher nicht nötig, eine Folge $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ zu konstruieren mit $\|f-\varphi_n\| \longrightarrow 0$!

<u>Beweis für</u> $f \in C^0([a,b])$:

(allgemeiner Fall: Skript)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. f gleichmäßig <u>stetig</u> auf $[a,b]$ <u>kompakt</u>

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/(b-a)$$

$$\forall\, x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \delta$$

Sei nun $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$

mit $\boxed{\delta_Z \leq \delta.}$ Seien beliebige

Zwischenstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gewählt $\Longrightarrow$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - g_i(x))\, dx \right|$$

mit $\quad g_i \in \mathcal{T}([x_{i-1}, x_i]), \quad g_i \equiv f(z_i)$

$$\Longrightarrow \left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f - g_i|}_{\leq \varepsilon / b-a} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Riemann Integration

(vgl. Hildebrandt, Analysis I, p. 266 f.)

Sei $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Sei $\quad Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$

eine Zerlegung. Bilde

$\mathcal{O}(Z) :=$ Obersumme zu Z $:=$

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

$\mathcal{U}(Z) :=$ Untersumme .... $:= \sum \inf f \ldots$

$\Longrightarrow$:

- $\mathcal{O}(Z_1) \geq \mathcal{U}(Z_2)$ für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2
- $\left\{ \begin{array}{l} \delta(Z) \text{ wird kleiner } \Longrightarrow \\ \mathcal{O}(Z) \text{ fällt, } \mathcal{U}(Z) \text{ wächst} \end{array} \right\}$

Also existieren

$$\left(\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \right) \sup_{Z} \mathcal{U}(Z) \leq \inf_{Z} \mathcal{O}(Z) \left(\leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)\right)$$

in $\mathbb{R}$

Notation: $\inf \mathcal{O} = \sup \mathcal{U} \; :\Longleftrightarrow$

f Riemann integrierbar

Satz 12.7 $\Longrightarrow$:

$\boxed{\begin{array}{l} f \in \mathcal{R}([a,b]) \text{ ist } \underline{\text{Riemann}} \ \underline{\text{integrierbar}}, \\ \text{Regelintegral} = \text{Riemann Integral} \end{array}}$

aber: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

ist $\boxed{\text{keine}}$ Regelfunktion auf $[0,1]$, das Riemann Integral von f existiert! Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underbrace{\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx}_{\substack{=\text{Regelintegral} \\ \text{über } [\varepsilon,1]}} = \text{Riemann Integral über } [0,1]$$

$\square$

Mit Satz 12.7 lassen sich mühselig einige Integrale ausrechnen:

<u>Beispiel</u>: $\int_0^b x^2 dx = ?$ Wähle

$$\begin{cases} x_k := \frac{k}{n} \cdot b, & k = 0, \dots, n, \\ z_k := x_k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_0^b x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(z_k) \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(z_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 b^2 \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2}_{= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{b^3}{3}$$

bei $\int_a^b \sin x \, dx$, $\int_a^b e^x \, dx$, ...

kommt man damit nicht weiter!

Wir brauchen den „Hauptsatz", den wir mit dem MWS der Integralrechnung beweisen. Dieser MWS gründet sich seinerseits auf den ZWS für stetige Fkten.

$\boxed{\text{Satz 12.8}}$: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in \mathcal{R}([a,b])$ sei ≥ 0. Dann gibt es ein $y \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(y) \int_a^b p(x)\,dx.$$

Für $p \equiv 1$ folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(y)\,(b-a) \text{ bzw.}$$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis: Wegen $p \geq 0$ ist

$$\min_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f \cdot p\,dx \leq$$

$$\max_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x)\,dx \Longrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)}_{\text{o.E. } \neq 0}^{-1} \cdot \int_a^b f \cdot p\,dx \in \left[\min f, \max f\right]$$

$$\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists\, y \in [a,b] \text{ mit } f(y) = \ldots\ldots$$

$\square$

Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ gilt die Aussage nicht!

Satz 12.9 : (Hauptsatz der Diff- und Int'rechnung)

Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $a < b$. Man setzt

$$F : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, dt.$$

Dann gilt:

(i) F ist Lipschitz auf $[a,b]$:

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\| \, |x-y|$$

(ii) F ist in $x \in (a,b)$ links- und rechtsseitig diff'bar, in den Randpunkten einseitig mit

$$F_\pm'(x) = f(x\pm).$$

(iii) Ist $f \in C^0([a,b])$, so gilt $F \in C^1([a,b])$ mit $F' = f$.

Beweis von (iii) (Hauptaussage !):

Sei $x \in (a,b)$, $h > 0$. Für Randpunkte und/oder $h < 0$ rechne analog. Dann ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\boxed{\substack{12.8 \text{ mit} \\ p \equiv 1}}}{=} h \cdot f(y)$$

für ein $y \in [x, x+h]$, also

$$\frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] = f(y).$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) - f(x) \right| = \left| f(y) - f(x) \right|$$

und wegen der Stetigkeit von f geht die r. S. gegen 0 bei $h \downarrow 0$.

$\square$

Korollar: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{C}$ stetig, so hat f eine Stammfunktion auf I, z.B.

$$\boxed{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in I,}$$

mit irgendeinem Basispunkt $x_0 \in I$.

Notation: zwei Stammfunktionen unterscheiden sich bekanntlich nur um eine additive Konstante; ist F irgendeine Stammfkt. zu f, so schreibt man symbolisch

$$\int f(x)\,dx := \{F + c : c \in \mathbb{C}\}$$

für die Menge aller Stammfktn oder auch

nur

$$\int f(x)\,dx = F + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Man nennt $\int f(x)\,dx$ das unbestimmte Integral von f, und die Formulierung „berechne das unbestimmte Integral zu f" bedeutet: beschreibe alle Stammfunktionen zu f.

Vorgehensweise: $\int \cos x \cdot dx$?

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \implies$$

$$\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + c}$$

$\boxed{\text{Korollar}}$: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, und F irgendeine Stammfunktion zu f, so gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F\Big|_a^b \left(:= F(b) - F(a)\right)}$$

<u>Bew:</u> $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \text{Konstante} \Longrightarrow$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \square$$

<u>Beispiele:</u> 1.) $0 < a < b$, $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b/a)$

denn $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, also $\ln x$

eine Stammfkt. zu $1/x$.

2.) $\int e^x\,dx = e^x + c$

3.) $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$,

$a \neq -1$

Integrationsregeln

(ergeben sich via Stammfkt. aus Ableitungsregeln)

I. Partielle Integration (Produktintegration)

Sei I ein Intervall; $f, g \in C^1(I)$.
Dann gilt:

$$\boxed{\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' g \, dx}$$

für das unbestimmte Integral bzw.

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \, dx = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f' g \, dx}$$

für $a, b \in I$.

Beweis: $(fg)' = f'g + f \cdot g' \implies$

$$\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$$

$\square$

<u>Beispiele</u>: man muss f, g passend wählen – dafür gibt es <u>kein</u> allgemeines Prinzip!

① $a \neq -1$: $\boxed{\int x^a \cdot \ln x \, dx = ?}$

$$f(x) := \ln x, \quad g(x) := \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

$$\Rightarrow \int x^a \ln x \, dx = \int g'(x) f(x) \, dx =$$

$$\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln x - \int \frac{1}{a+1} x^{a+1} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln x - \frac{1}{a+1} \int x^a \, dx =$$

$$\frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln x - \frac{1}{(a+1)^2} x^{a+1}$$

② „<u>Iteration</u>": $n \in \mathbb{N}_0$,

$$I_n := \int x^n \cdot \cos x \, dx$$

finde eine Rekursionsformel für I_n!

$$I_0 := \int \cos x \, dx = \sin x + c ;$$

$$n \geq 2: \quad I_n = \int x^n \cdot \frac{d}{dx} \sin x \, dx \overset{(*)}{=}$$

$$x^n \cdot \sin x - n \int x^{n-1} \cdot \sin x \, dx =$$

$$x^n \cdot \sin x + n \int x^{n-1} \frac{d}{dx} \cos x \, dx \overset{(*)}{=}$$

$$x^n \cdot \sin x + n x^{n-1} \cdot \cos x$$

$$- n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx \Longrightarrow$$

$$\boxed{I_n = x^n \cdot \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) I_{n-2}}$$

II. Substitutionsregel („Variablentransformation")

Sei I ein Intervall und

$f \in C^0(I, \mathbb{C})$. Sei

$$\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$$

mit $\varphi([a,b]) \subset I$.

Dann gilt:

$$(1) \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

bzw.

$$(2) \quad \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \left\{\int f(x)\,dx\right\}_\varphi$$

Bem: 1.) man transformiert f mittels der Funktion φ; damit verbunden ist eine Transformation der Integrale;

2.) $\left\{ \int f(x)\,dx \right\}_{\varphi}$ bedeutet: man verkette die Stammfunktion mit φ;

3.) in der Praxis: $\boxed{\int_A^B f(x)\,dx = ?}$

suche „passendes" φ mit

$$\varphi(a) = A, \quad \varphi(b) = B$$

in der Hoffnung, die rechte Seite von (1) auswerten zu können.